

آزمون چهارم نکته و تست ۱۴۰۳

رشته انسانی

استاد:

محمد ابراهیم توزنده جانی

۱- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت که بر ۵ بخش پذیر بوده و از ۳۰۰۰۰ بزرگتر باشد؟

(۱) ۱۸

(۲) ۱۲

(۳) ۱۶

(۴) ۲۴

چون می خواهیم عدد ۵ رقمی سازیم، ۵ خانه در نظر می گیریم:

□ □ □ □ □

حال چون عدد مورد نظر باید سر ۵

بخش پذیر باشد، خانه سمت راست به یک طریق (یعنی فقط عدد ۵) پر می شود و چون تکرار ارقام مجاز نیست و عدد مورد نظر بزرگتر از ۳۰۰۰ است، خانه سمت چپ به دو طریق (یعنی اعداد ۳ و ۴) پر می شود و چون از ۵ عدد، ۲ عدد در خانه های سمت چپ و سمت راست قرار گرفته اند، خانه های وسط به ترتیب به ۳ طریق و ۲ طریق و ۱ طریق پر می شوند. بنابراین:

$$\boxed{۲} \boxed{۳} \boxed{۲} \boxed{۱} \boxed{۱} = ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۱۲$$

اعداد
۳ یا ۴

عدد ۵

۲- می‌خواهیم با حروف کلمه «FLOWER» و بدون تکرار حروف، کلمات ۴ حرفی بسازیم. تعداد این کلمات که شامل حرف O باشند، چند برابر تعداد کلماتی است که فاقد حرف O هستند؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

ابتدا تعداد کلمات چهار حرفی که فاقد حرف O هستند را می‌یابیم. در این حالت باید از حروف F، L، W، E، R استفاده کنیم و چهار تا خانه مقابل را پر کنیم. تعداد این کلمات $4! = 24$ است. از طرفی تعداد کل کلمات چهار حرفی با استفاده از ۶ حرف کلمه FLOWER برابر است با:

$$\text{تعداد کل کلمات چهار حرفی} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

پس تعداد کلماتی که حرف O را دارند برابر می‌شود با:

$$360 - 24 = 336$$

بنابراین تعداد کلمات ۴ حرفی شامل حرف O، ۳۳۶ برابر تعداد کلمات ۴ حرفی فاقد حرف O است.

۳- به چند طریق می توان ۳ کتاب ادبی مختلف، ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۲ کتاب فیزیک مختلف را کنار هم قرار داد. به طوری که کتاب های ادبی همواره کنار هم بوده و کتاب های فیزیک در طرفین کتاب های ادبی قرار داشته باشند؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۲۴۰

(۳) ۷۲۰

(۴) ۱۴۴۰

من خواهم ۳ کتاب ادبی مختلف، ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۲ کتاب فیزیک مختلف را کنار هم قرار دهم که کتاب های ادبی همواره کنار هم باشند و کتاب های فیزیک در طرفین آنها باشند. ابتدا ۳ کتاب ادبی را یک شیء در نظر می گیریم که در دو طرف آن دو کتاب فیزیک قرار دارد. حال این شیء به همراه ۴ کتاب ریاضی مختلف دیگر تشکیل ۵ شیء می دهند که به ۵ طریق کنار هم جابه جا می شوند. از طرفی ۳ کتاب ادبی هم به ۳ حالت کنار هم جابه جا می شوند و ۲ کتاب فیزیک هم در طرفین کتاب های ادبی به ۲ طریق جابه جا می دارند. لذا طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها برابر می شود با :

$$۵! \times ۳! \times ۲! = ۱۲۰ \times ۶ \times ۲ = ۱۴۴۰$$

۴- چهار سرباز و سه فرمانده به چند طریق می توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که حداقل دو سرباز کنار هم باشند؟

۱۷۲۸ (۴)

۵۰۴۰ (۳)

۴۸۹۶ (۲)

۳۶۰۰ (۱)

ابتدا حالاتی که هیچ دوسربازی کنار هم ننشیند را محاسبه و جواب را از تعداد کل برای قرار گرفتن ۷ نفر کنار هم (۴ سرباز و ۳ فرمانده) کم می کنیم.

وقتی دوسربازی کنار هم ننشیند که فرمانده ها بین سربازها قرار گرفته باشند (س ف س ف س ف س ف س). چون سربازها و فرمانده با هم متفاوت اند، بین خود نیز جای خالی دارند. تعداد جایگشت های فرمانده ها ۳! و تعداد جایگشت های سربازان ۴! است پس تعداد کل جایگشت های آن به صورت یک درصیل $۱۴۴ = ۴! \times ۳!$ است. تعداد کل جایگشت های ۷ نفر نیز $۵۰۴۰ = ۷!$ می باشد. جواب نهایی :

$$۵۰۴۰ - ۱۴۴ = ۴۸۹۶$$

۵ - ۴ نفر خانم و ۵ نفر آقا در یک مسابقه شرکت کرده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ نفر از بین آن‌ها انتخاب نمود به طوری که حداقل یک نفر از آن‌ها خانم نباشد و به آن‌ها مدال‌های طلا، نقره و برنز اهدا نمود؟

(۱) ۸۰

(۲) ۱۶۰

(۳) ۲۸۰

(۴) ۴۸۰

من خواهم از بین ۴ نفر خانم و ۵ نفر آقا، ۳ نفر انتخاب کنم که حداقل یک نفر از آن‌ها خانم نباشد (از روش مستقیم می‌رویم که در آن هر نفر انتخاب شده خانم هستند) داریم:

تعداد حالات نامطلوب - کل حالات = تعداد حالت مطلوب

$$= \binom{4+5}{3} - \binom{4}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} - 4 = 84 - 4 = 80$$

پس به ۸۰ حالت مختلف می‌توان ۳ نفر با ویژگی خواسته شده انتخاب کرد. من خواهم به این ۳ نفر مدال‌های طلا، نقره و برنز اهدا کنم که این کار حوروش به ۳ حالت مختلف مایل انجام است.

$$80 \times 3! = 80 \times 6 = 480 \Rightarrow \text{جواب}$$

۶- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه ۷ عضوی، از تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه n عضوی، ۲۰ واحد بیشتر است. این دو مجموعه روی هم چند عضو دارند؟

$$13 \text{ (4)}$$

$$15 \text{ (3)}$$

$$12 \text{ (2)}$$

$$11 \text{ (1)}$$

$$\binom{7}{3} = \binom{n}{2} + 20 \rightarrow \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = \frac{n(n-1)}{2} + 20$$

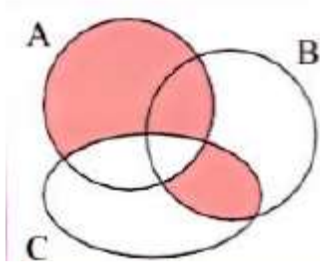
$$\rightarrow 35 = \frac{n(n-1)}{2} + 20 \xrightarrow{\times 2}$$

$$70 = n(n-1) + 40 \rightarrow n(n-1) = 30$$

$$\rightarrow 5 \times 6 = 30 \rightarrow n = 6$$

این دو مجموعه روی هم $7+6=13$ عضو دارند.

۷- نمودار داده شده در شکل زیر، مربوط به کدام گزینه است؟



$$A \cup (B \cap C) - (A \cap B \cap C) \quad (۱)$$

$$[(A - C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C) \quad (۲)$$

$$[B \cap (A \cup C)] - C \quad (۳)$$

$$[(A \cup B) - (A \cap C)] - B \quad (۴)$$

۸- در ظرفی ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ قرار دارد. ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم با کدام احتمال مجموع شماره‌های این سه مهره فرد است؟

۰/۶ (۴)

۰/۴۵ (۳)

۰/۴ (۲)

۰/۳ (۱)

برای آنکه مجموع شماره‌های سه مهره انتخابی فرد باشد، باید یکی از

حالات زیر رخ دهد: الف) ۲ مهره با شماره زوج و ۱ مهره با

شماره فرد خارج شود ب) هر ۳ مهره شماره فرد باشد

از ظرفی و مثالی نمونه ای انتخاب ۳ مهره از ۵ مهره موجود است.

پس داریم: یکی از مهره‌های فرد $\rightarrow$ ۲ مهره از مهره‌های زوج $\uparrow$ ۳ مهره از مهره‌های فرد $\leftarrow$

$$P(A) = \frac{\binom{3}{3} + \binom{2}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{1 + 1 \times 3}{10} = \frac{4}{10}$$

۹- چهار دندانپزشک و سه تکنسین اتاق عمل در یک صف به طور تصادفی کنار هم قرار می گیرند.
احتمال آن که حداقل دو دندانپزشک کنار هم باشند، کدام است؟

$$\frac{17}{70} (4)$$

$$\frac{17}{35} (3)$$

$$\frac{34}{35} (2)$$

$$\frac{1}{35} (1)$$

از روش متعمق استفاده می کنیم. تعداد کل حالات: $7!$
تعداد حالات نامطلوب (حالت هایی که هیچ دو دندانپزشکی کنار هم نباشد): $DTDTDTD$
 $4! \times 3!$

حالت های مطلوب:

$$7! - 4! \times 3!$$

$$P(A) = \frac{7! - 4! \times 3!}{7!} = 1 - \frac{4! \times 3!}{7 \times 6 \times 5 \times 4!} =$$

$$1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$$

۱۰- در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده هم رنگ هستند؟

۰/۲۴ (۴)

۰/۱۸ (۳)

۰/۱۵ (۲)

۰/۱۲ (۱)

$$\begin{aligned}
 P(\text{هر ۴ مهره هم رنگ}) &= P(\text{۲ مهره ظرف اول سفید}) \times P(\text{۲ مهره ظرف دوم سفید}) \\
 &+ P(\text{۲ مهره ظرف اول سیاه}) \times P(\text{۲ مهره ظرف دوم سیاه}) \\
 &= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \\
 &= \frac{\frac{5 \times 4}{2}}{\frac{7 \times 6}{2}} \times \frac{\frac{4 \times 3}{2}}{\frac{6 \times 5}{2}} + \frac{\frac{3 \times 2}{2}}{\frac{7 \times 6}{2}} \times \frac{1}{\frac{4 \times 3}{2}} = \\
 &= \frac{10}{42} \times \frac{9}{15} + \frac{3}{42} \times \frac{1}{15} = \frac{93}{42 \times 15} = \frac{3}{20} = 0.15
 \end{aligned}$$

۱۱- رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{r} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right)$, $a_1 = k$ برای محاسبه جذر تقریبی عدد k به کار می‌رود.

اگر a_3 مقدار مناسب این تقریب باشد، مقدار $\sqrt{11}$ برابر کدام است؟

$$\frac{19}{6} \quad (4)$$

$$\frac{23}{6} \quad (3)$$

$$\frac{43}{12} \quad (2)$$

$$\frac{47}{12} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{r} \left(a_n + \frac{11}{a_n} \right), a_1 = 11$$

$$\xrightarrow{n=1} a_2 = \frac{1}{r} \left(a_1 + \frac{11}{a_1} \right) = \frac{1}{r} \left(11 + \frac{11}{11} \right)$$

$$= 4$$

$$\xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{r} \left(a_2 + \frac{11}{a_2} \right) = \frac{1}{r} \left(4 + \frac{11}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{47}{4} \right) = \frac{47}{12}$$

۱۲- در دنباله اعداد $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ که یک الگوی منظم و ثابت دارد، جمله نوزدهم برابر ۴۱۸۱ و جمله هفدهم برابر ۱۵۹۷ است. اگر مجموع ارقام اولین جمله پنج رقمی دنباله برابر با n باشد، حاصل $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پایه به الگوی داده شده، دنباله مورد نظر، دنباله معروف فیبوناچی است که در آن هر جمله برابر با مجموع دو جمله قبلی است به جز دو جمله اول پس:

$$a_{19} = a_{18} + a_{17} \rightarrow 4181 = a_{18} + 1597$$

$$\rightarrow a_{18} = 2584$$

$$a_{20} = a_{19} + a_{18} = 4181 + 2584 = 6765$$

$$a_{21} = a_{20} + a_{19} = 6765 + 4181 = 10946$$

پس $a_{21} = 10946$ ، اولین جمله پنج رقمی دنباله است و

$$n = a_{21} \text{ (مجموع ارقام)} = 20 \rightarrow \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor = 6$$

۱۳- a و b و c به ترتیب جملات چهارم، اول و هفتم از یک دنباله حسابی هستند. اگر $5a$ و $2b$ و $12/5c$ تشکیل یک دنباله هندسی بدهند، قدر نسبت دنباله حسابی چند برابر b است؟

۲ (۴)

۲- (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

a و b و c، $12/5c$ ، $2b$ و $5a$ تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند.

$$(2b)^2 = (5a)(12/5c) \rightarrow \left(\frac{5}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right) \times \left(\frac{12}{5}c\right)$$

$$\rightarrow \frac{25}{4}b^2 = \frac{12}{4}ac \rightarrow b^2 = ac$$

پس a، b و c جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند.
از طرف دیگر هر ۳ عدد، جمله چهارم، اول و هفتم یک دنباله حسابی می‌باشند. به عبارتی برابر است جمله چهارم، اول و هفتم از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی

باشند. در این صورت داریم: $q = -2$

از طرفی در دنباله حسابی داریم:

$$a + x(-2) = a_1 \rightarrow (a_1 + 3b)(-2) = a_1 \rightarrow$$

$$-2a_1 - 6b = a_1 \rightarrow -3a_1 = 6b \rightarrow d = -\frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = b \rightarrow d = -\frac{1}{2}b$$

۱۴- مجموع سه جمله اول یک دنباله هندسی ۷۰۲ و مجموع سه جمله بعدی (چهارم تا ششم) ۲۶

است. جمله سوم این دنباله کدام است؟

۱۸ (۴)

۵۴ (۳)

۲ (۲)

۶ (۱)

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 702 \rightarrow a_1(1+r+r^2) = 702 \quad (1) \\ a_4 + a_5 + a_6 = a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5 = 26 \end{cases}$$

$$\rightarrow a_1 r^3 (1+r+r^2) = 26 \quad (2)$$

$$\rightarrow \frac{\text{عبارت (۲)}}{\text{عبارت (۱)}} = \frac{a_1 r^3 (1+r+r^2)}{a_1 (1+r+r^2)} = r^3$$

$$= \frac{26}{702} = \frac{1}{27} \rightarrow r = \frac{1}{3}$$

جایگذاری r در یکی از روابط بالا :

$$\text{عبارت (۱)} : a_1(1+r+r^2) = a_1\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{13}{9} a_1 = 702 \rightarrow a_1 = \frac{702 \times 9}{13} = 486$$

$$a_3 = a_1 r^2 = 486 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 54$$

۱۵- مجموع چهل جمله اول یک دنباله حسابی ۳ برابر مجموع شانزده جمله اول آن است. نسبت جمله سی و یکم این دنباله به جمله اولش کدام است؟

$$\frac{13}{9} (۴)$$

$$\frac{13}{7} (۳)$$

$$\frac{11}{9} (۲)$$

$$\frac{11}{7} (۱)$$

$$* S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

مجموع ۳ جمله اول:

$$S_3 = \frac{3}{2} (2a_1 + 2d) = 3(a_1 + d)$$

مجموع ۱۶ جمله اول:

$$S_{16} = \frac{16}{2} (2a_1 + 15d) = 8(2a_1 + 15d)$$

$$\frac{S_3}{S_{16}} = \frac{3}{8} = \frac{3(a_1 + d)}{8(2a_1 + 15d)} \rightarrow$$

$$\frac{1 \cdot a_1 + 1d}{2a_1 + 2d} = \frac{3}{8} \rightarrow 12a_1 + 8d = 6a_1 + 6d$$

$$\rightarrow 2a_1 = 1d \rightarrow a_1 = \frac{1}{2}d$$

$$\frac{a_{31}}{a_1} = \frac{a_1 + 30d}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}d + 30d}{\frac{1}{2}d} =$$

$$\frac{\frac{145}{2}d}{\frac{1.5}{2}d} = \frac{145}{1.5} = \frac{11}{1} \quad \frac{1.5}{2}d$$

۱۶- ریشه پنجم عدد مثبت a ، از حاصل ضرب ریشه‌های مرتبه دهم آن، ۶ واحد بیشتر است. ریشه

پنجم عدد $\frac{9}{a} + 5$ کدام است؟

* اگر n فرد باشد، ریشه n ام عدد a برابر $a^{\frac{1}{n}}$ است و اگر n زوج باشد، ریشه n ام عدد a ، $a^{\frac{1}{n}}$ و $-a^{\frac{1}{n}}$ است

$$a^{\frac{1}{5}} = (-a^{\frac{1}{5}})(a^{\frac{1}{5}}) + 4 = a^{\frac{1}{5}} = -a^{\frac{1}{5}} + 4$$

$$\rightarrow a^{\frac{1}{5}} = 2 \rightarrow a = 2^5 \rightarrow \frac{a}{9} = 22 \rightarrow$$

$$\frac{a}{9} + 5 = 22$$

ریشه پنجم عدد $2 = 22$

۱۷- اگر $A = \sqrt[3]{9\sqrt{3}} \times (24)^{-\frac{2}{3}}$ مقدار $\frac{1}{4A}$ کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}} (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} (2)$$

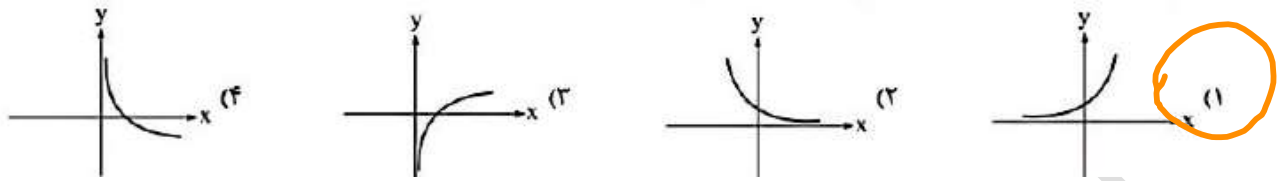
$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} (1)$$

$$A = \sqrt[3]{3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{-\frac{2}{3}} \times (2^3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow A = 3^{\frac{5}{6} - \frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{6}} \times 2^{-2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{4A} = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

۱۸- نمودار تابع $f(x) = a^x$ از نقطه $(-1, 3)$ می‌گذرد نمودار تابع $y = (5a - 1)^{-x}$ به کدام صورت است؟



۱- نقطه $(-1, 3)$ روی تابع $f(x) = a^x$ قرار دارد پس:

$$f(-1) = 3 \rightarrow a^{-1} = 3 \rightarrow \frac{1}{a} = 3 \rightarrow$$

$$3a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

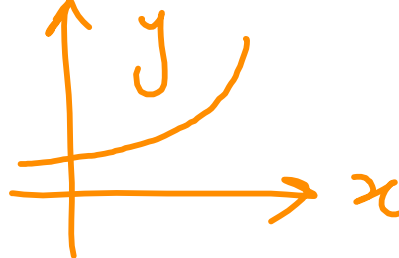
گام دوم: با جایگذاری $a = \frac{1}{3}$ ، ضابطه $y = (5a - 1)^{-x}$

$$y = (5(\frac{1}{3}) - 1)^{-x} = (\frac{5}{3} - 1)^{-x}$$

$$= (\frac{2}{3})^{-x} = (\frac{3}{2})^x$$

پس ضابطه به شکل $y = (\frac{3}{2})^x$ است.

گام سوم: چون $\frac{3}{2}$ بزرگتر از یک است پس نمودار تابع


 $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ به شکل مقابل است:

۱۹- توابع نمایی $y = (\sqrt{3})^{2x+1}$ و $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه (a, b) متقاطع اند. مقدار $\frac{b^2}{a}$ کدام است؟

-۱۸ (۴)

۱۸ (۳)

-۱۲ (۲)

۱۲ (۱)

$$y_1 = y_2 \rightarrow (\sqrt{3})^{2x+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2x+1} = \left(3^{-2}\right)^x \rightarrow 3^{\frac{2x+1}{2}} = 3^{-2x}$$

$$\rightarrow \frac{2x+1}{2} = -2x \rightarrow 2x+1 = -4x \rightarrow$$

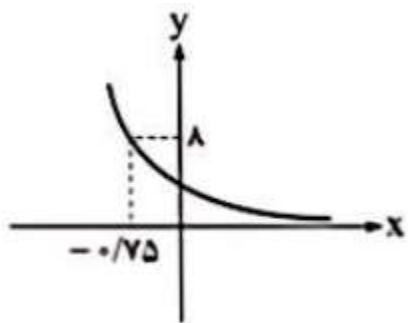
$$4x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$x = -\frac{1}{4}$ ارزشی از ضابطه ها قرار می دهیم: $y = 3^{-2x} = 3^{-2(-\frac{1}{4})} = 3^{\frac{1}{2}}$

مختصات نقطه تقاطع: $\left(-\frac{1}{4}, 3^{\frac{1}{2}}\right)$
 $\swarrow \quad \swarrow$
 $a \quad b$

$$\frac{b^2}{a} = \frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2}{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{-\frac{1}{4}} = -12$$

۲۰- در نمودار تابع مقابل، طول نقطه‌ای با عرض $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ که کدام است؟



$$\frac{1}{6} (2)$$

$$\frac{1}{12} (4)$$

$$\frac{1}{3} (1)$$

$$\frac{1}{4} (3)$$

جایگزینی نقطه $(-0.75, 1)$:

$$1 = a^{-0.75} \quad \quad \quad 1 = a^{-\frac{3}{4}}$$

دو طرف را به توان $-\frac{4}{3}$ می‌رسانیم :

$$1^{-\frac{4}{3}} = \left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}} = 1^{-\frac{4}{3}} = a^1$$

$$\rightarrow (2^3)^{-\frac{4}{3}} = a \rightarrow 2^{-4} = a$$

$$y = a^x = (2^{-4})^x = 2^{-4x}$$

در این نقطه ای هستیم که عرض آن $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ است :

$$y = 2^{-4x} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 2^{-4x}$$

$$\frac{1}{\gamma^{\frac{\gamma}{\mu}}} = \gamma^{-\frac{\gamma}{\mu}} \rightarrow \gamma^{-\frac{\gamma}{\mu}} = \gamma^{-\frac{\gamma}{\mu}}$$

$$\rightarrow -\frac{\gamma}{\mu} = -\frac{\gamma}{\mu} \rightarrow \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\gamma}{\mu} \rightarrow$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{\mu} \rightarrow \mu = \frac{\gamma}{\gamma}$$